

Задания В10

Подготовка к ЕГЭ-2012. Математика

Теоретический минимум при решении В10



©Егор Цалкович

Специально для группы

Математика: теория, практика, ЕГЭ

<http://vkontakte.ru/matematika100ballov>

2011 – 2012 г.

От авторов

С 2012 года в ЕГЭ по математике появится новое задание – связанное с комбинаторикой и теорией вероятностей (в официальном кодификаторе ЕГЭ эта тема отмечена как *Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей*). Многие школьники не изучают подобные темы в школах, что и является главной проблемой для тех, кто будет сдавать ЕГЭ. Мы дадим краткий теоретический материал для того, чтобы вы поняли, как решать подобные задания.

Так как большого количества заданий по данной теме еще нет, мы будем решать простейшие комбинаторные задачи, а также задачи на вычисление вероятности события. Впоследствии, когда материал будет уточняться, мы заострим внимание на заданиях из ЕГЭ.

Удачи и успехов.

Кураторы группы

«Математика: теория, практика, ЕГЭ»

1. Комбинаторика.

Все мы когда-нибудь задавались вопросом: сколькими способами можно что-то сделать? Ответ на этот вопрос дает наука *комбинаторика*.

В каждой из комбинаторных задач необходимо подсчитать *число возможных вариантов осуществления чего-либо*, ответить на главный вопрос комбинаторики «сколькими способами можно это сделать?».

Множество комбинаторных задач можно решить, зная *два основных правила комбинаторики: сложения и умножения*.

Упрощенно правило умножения звучит так: если элемент А можно выбрать n способами и, при любом выборе А, элемент В можно выбрать m способами, то пару (А, В) можно выбрать $n \cdot m$ способами. Это правило действует также в случаях, когда элементов больше двух.

Мы думаем, что определение для некоторых может показаться непонятным, поэтому сразу перейдем к примеру использования правила умножения.

Пример 1.

Сейф имеет шифр, состоящий из 4 букв – А, В, С и Е. Сколько всего существует возможных вариантов шифра, если буквы в шифре не повторяются?

Решение:

Для наглядности изобразим кодовый замок сейфа.



А В С Е

На каждом из четырех мест шифра стоит одна буква. Начнем рассматривать все варианты размещения этих букв, начиная с первого места.

Итак, на первом месте может стоять одна из букв А, В, С или Е.

Всего вариантов размещения букв на первом месте столько же, сколько и самих букв – то есть 4. Рассмотрим второе место шифра.

На втором месте может стоять уже не любая буква – ведь на первом месте уже находится одна из выбранных нами букв – а по условию, буквы не должны повторяться. То есть всего вариантов размещения букв на втором месте равно $4 - 1 = 3$ варианта.

На третьем месте могут находиться всего две буквы – ведь две уже стоят на первых двух местах. Итого вариантов для третьего места ровно 2.

Выбрав три буквы, мы автоматически ставим оставшуюся букву на четвертое место шифра. Итого – один вариант для четвертого места.

Всего вариантов шифра: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

В этой задаче мы действовали согласно правилу умножения – ведь элемент А (первую букву шифра) можно выбрать 4 способами и, при любом

выборе А (первой буквы шифра), элемент В (вторую букву шифра) можно выбрать 3 способами – а значит, пару (А, В) (первую и вторую цифру шифра) можно выбрать $4 \cdot 3$ способами. Аналогично строятся рассуждения и для оставшихся двух букв шифра.

Перейдем ко второму правилу: *правилу сложения*.

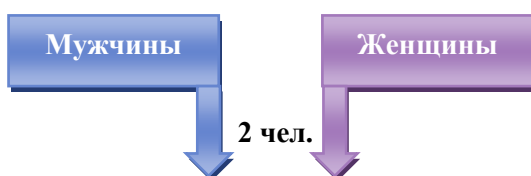
Упрощенно правило сложения звучит так: Если элемент А можно выбрать n способами, а элемент В можно выбрать m способами, то выбрать А или В можно $n+m$ способами. Рассмотрим это правило на примере.

Пример 2.

В лаборатории работает 26 сотрудников: 12 мужчин и 14 женщин. Необходимо сформировать группу из двух сотрудников лаборатории одного пола для поездки на конференцию. Сколькими способами это может быть сделано?

Решение:

Изобразим сотрудников лаборатории визуально для наглядности решения:



Согласно условию задачи, необходимо выбрать двух человек – либо это будут два человека мужского пола, либо два человека женского пола.

Рассмотрим **выбор 2 мужчин**:

Всего мужчин 12. Из них должны быть выбраны двое. Первый мужчина может быть выбран 12 способами, второй мужчина может быть выбран уже 11 способами (так как один мужчина уже выбран). Согласно правилу умножения, двух мужчин можно выбрать $12 \cdot 11 = 132$ способами.

Рассмотрим **выбор 2 женщин**:

Действуем аналогично выбору двух мужчин. Всего женщин 14 – необходимо выбрать двух. Всего $14 \cdot 13 = 182$ способа.

То есть общее число вариантов выбора делегатов для конференции равно $132+182=314$.

В этом примере мы действовали по правилу сложения: если элемент А (два лица мужского пола) можно выбрать 132 способами, а элемент В (два лица женского пола) можно выбрать 182 способами, то выбрать А или В (либо двух мужчин, либо двух женщин) можно $132+182$ способами.

Существует несколько комбинаторных формул, которые часто упрощают решение задач на комбинаторику и теорию вероятностей. В каждой из таких формул рассматривается определенный способ выбора m элементов из множества, состоящего из n элементов (причем $0 < m \leq n$).

Существует два основных способа выбора нескольких элементов из некоторого множества – *без повторений* (то есть выбранные элементы не возвращаются обратно во множество – другими словами, можно сразу отобрать m элементов или отобрать m элементов по одному) и *с повторениями* (выбранные элементы возвращаются обратно во множество и могут быть выбраны несколько раз).

Рассмотрим, например, процесс доставания m носков из ящика в темной комнате. Если мы достаем одну пару, затем еще одну пару – и так до того, пока не вынем m носков – то это выбор **без повторений**. А если мы вытаскиваем одну пару носков, затем кладем их обратно, вытаскиваем еще одну пару и кладем ее обратно, и так далее, пока в общей сложности мы не достанем m носков – это выбор **с повторениями**. Мы не будем углубляться в сложности выбора с повторениями, рассмотрим лишь **выбор без повторений**.

Всего существует несколько типов соединений элементов без повторений: **перестановки, размещения, сочетания**. Рассмотрим каждый из этих типов.

Перестановки без повторений — комбинаторные соединения, которые могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается $P(n)$. *Формула для нахождения количества перестановок без повторений:*

$$P(n) = n!$$

Здесь $n!$ – так называемый **факториал**. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. То есть, например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Но: $0! = 1$

Примеры перестановок: расстановка нескольких томов книги на полке, расстановка людей в очереди, тасовка игральных карт и так далее.

Пример 3.

В среду у шестого класса должно быть семь различных уроков. Сколькими способами можно составить расписание из данных уроков на среду?

Решение:

Любое расписание будет состоять из семи уроков, отличаться одно расписание от другого будет только порядком уроков. А значит, мы имеем дело с перестановкой без повторений.

Итак, имеем:

$$P(7) = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 \text{ вариантов расписания.}$$

Размещения без повторений — комбинаторные соединения, составленные из n элементов по m . При этом два соединения считаются различными, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.

Например, если мы будем составлять двузначные числа из цифр 1, 2 и 3 (при условии, что цифры внутри одного числа не будут повторяться), то получим следующие комбинации цифр:

12 13

21 23

31 32

То есть мы имеем соединения двух цифр, составленные из трех цифр. При этом данные соединения отличаются друг от друга либо **составом** (например, 12 и 23, 13 и 32 и т.д.), либо **порядком их расположения** внутри соединения (например, 12 и 21, 13 и 31 и т.д.). То есть мы составили **размещения без повторений**.

Число размещений без повторений обозначается как A_n^m .

Находится по **формуле** $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Проверим, верно ли мы решили задачу с двузначными цифрами из трех цифр. По формуле имеем:

$$A_n^m = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6 \text{ чисел. } \textbf{Задача решена верно.}$$

Примеры размещений: составление слов из набора различных букв, обозначение вершин многоугольника с помощью ряда букв, распределение первых трех мест на чемпионате по футболу и так далее.

Закрепим полученные знания на примере.

Пример 4.

В среду у шестого класса должно быть семь различных уроков. Сколькими способами можно составить расписание на среду, если всего шестой класс изучает девять различных предметов?

Решение:

Данная задача несколько отличается от задачи, которая была сформулирована при рассмотрении перестановок. Там требовалось составить расписание **из семи предметов**, выбранных из **этих самых семи предметов**. А здесь необходимо составить расписание **из семи предметов**, выбранных из **деяти предметов**. Такие расписания будут отличаться **составом** (разные предметы) и **порядком предметов** (например, предмет, идущий первым

уроком, можно поменять местами с последним уроком – и тогда это будет новое расписание). То есть это **размещения без повторений**. Итак:

$$A_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \mathbf{181440 \text{ вариантов.}}$$

Сочетания без повторений — комбинаторные соединения из n элементов по m , составленные из этих элементов и отличающиеся друг от друга только составом.

Например, если мы снова будем составлять двузначные числа из цифр 1, 2 и 3 (при условии, что цифры внутри одного числа не будут повторяться), отличающиеся только составом, то получим следующие комбинации цифр:

12

13

23

Варианты 12 и 21, 13 и 31, 23 и 32 равносильны – нам не важен порядок. В этом случае мы имеем дело с **сочетаниями**.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

С помощью этой формулы можно проверить результат решения задачи выше.

Примеры сочетаний: вытащить комбинацию из трех карт из колоды, выбор группы делегатов на конференцию, выбрать дежурных для поливки цветов и так далее.

Рассмотрим пример.

Пример 5:

Катя купила 10 различных конфет. Сколькими способами можно положить в вазу 3 конфеты?

Решение:

Нам не важно, в каком порядке будут лежать эти конфеты, нам важен сам факт размещения трех конфет в вазе. То есть это размещение, в котором порядок не важен, т.е. сочетание. Поэтому всего вариантов:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{120 \text{ вариантов.}}$$

2. Теория вероятности.

Что такое вероятность события? Многие люди, когда не знают, как поступить, подбрасывают монетку. Монетка – классический пример, который разбирается при изучении теории вероятности. У монетки есть две стороны – **орел** и **решка**.



Выпадение либо орла, либо решки в данном случае называется **событием**. Назовем событием А – выпадение орла, а событием В – выпадение решки, других событий быть не может (если не учитывать выпадение ребром). События могут быть благоприятными (такие называются **успехами**) и неблагоприятными (называются **неудачами**). Например, если человек хочет, чтобы выпала решка, и, подбросив монетку, видит там решку (произошло событие В), то это успех, а если выпадает орел (произошло событие А) – неудача. Успехи и неудачи, полученные в результате опыта, называются **исходами**.

Вероятность обозначается буквой P .

Вероятность события А обозначается $P(A)$. Чтобы определить вероятность события, необходимо найти **отношение числа успехов к общему числу всех исходов**.

Давайте найдем вероятность выпадения орла при подбрасывании монетки. **Всего исходов два**: орел и решка. Успехом для нас является ситуация, когда произойдет событие А – то есть **число успехов равно одному**. То есть:

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$$

Вероятность выражается либо десятичной дробью, либо простой обыкновенной дробью. Дробь не может быть иррациональной. Ведь **вероятность заключена в промежутке от 0 до 1 – это ВАЖНО ПОМНИТЬ!**

Для каждого события А есть **противоположное** ему событие $\bar{A}$, которое наступает тогда, когда не наступает событие А. В нашем примере:

Событие А – при подбрасывании монетки выпала решка.

Событие $\bar{A}$ – при подбрасывании монетки не выпала решка.

В случае монетки событие $\bar{A}$ равносильно событию В (при подбрасывании монетки выпал орел).

Очевидно, что $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Зачастую число успехов или число исходов находится с помощью комбинаторных формул и правил. Рассмотрим, например, задачу с сейфом (пример 1), слегка переформулировав ее:

Пример 6:

Сейф имеет шифр, состоящий из 4 букв – А, В, С и Е, причем буквы в шифре не повторяются. Какова вероятность того, что шифром к сейфу будет комбинация АВСЕ?

Решение:

Событие А – верной комбинацией к сейфу является АВСЕ.

Всего комбинаций, как мы выяснили с помощью комбинаторных формул, 24 (см. пример 1). А благоприятным является только один исход.

То есть:

$$P(A) = \frac{1}{24}$$